Cours de propagation de ondes

Licence 3ième année EEA

Mise à jour 2018

Olivier Jacquin

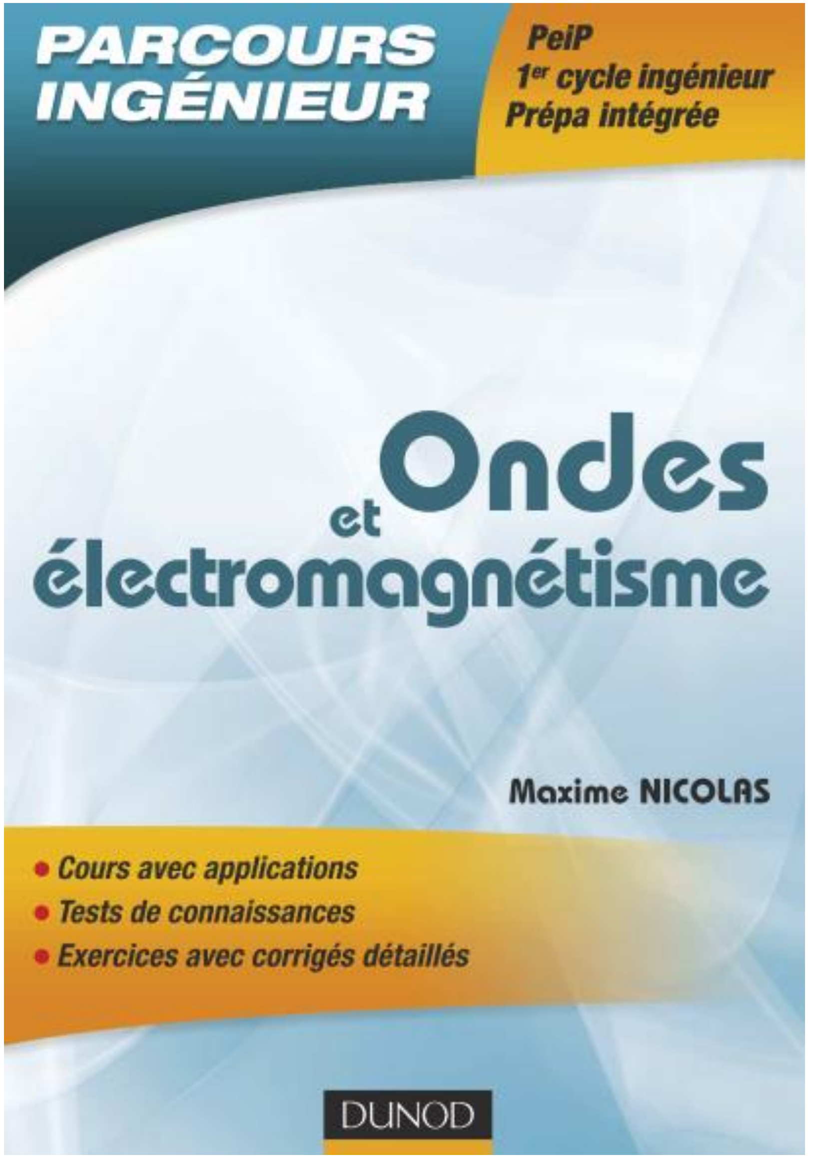
olivier.jacquin@univ-grenoble-alpes.fr
téléphone: 04 76 51 40 15

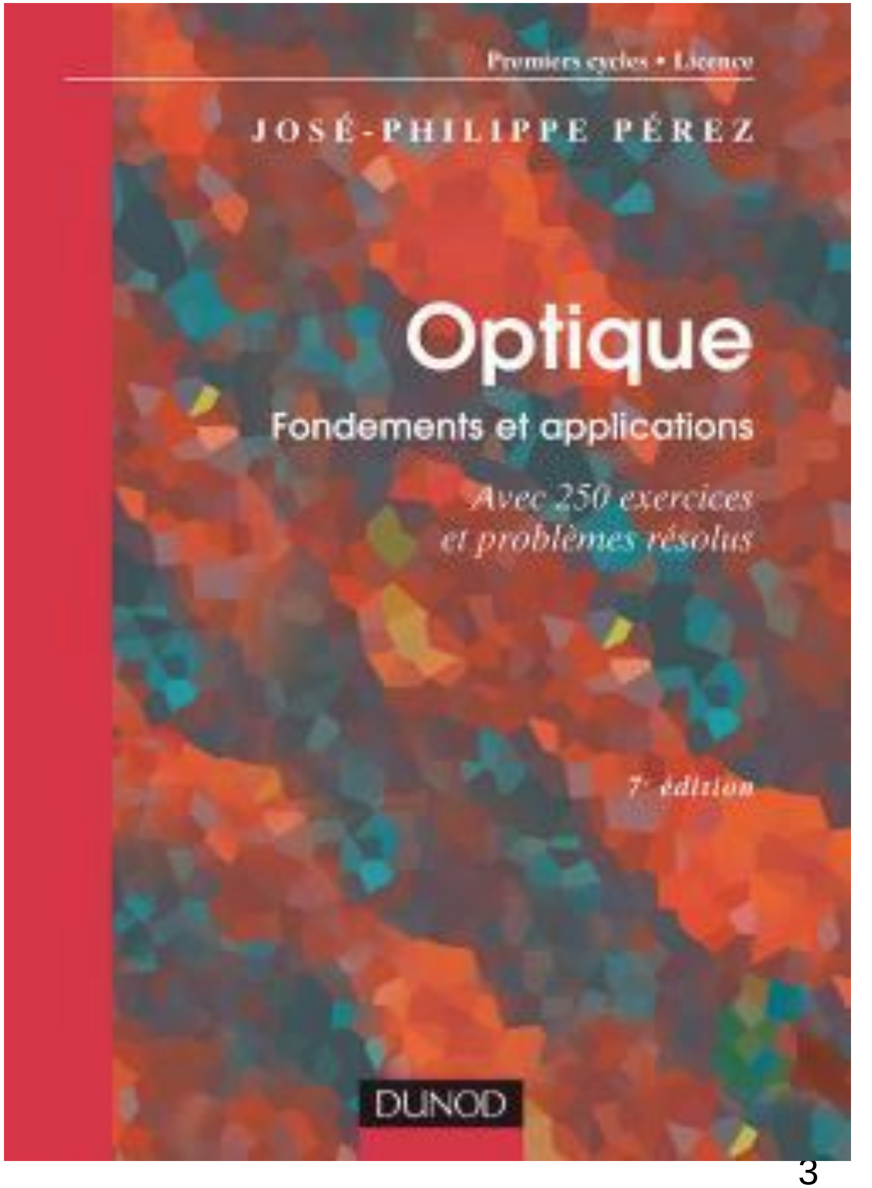
Pré requis

Électrostatique et magnétostatique : *force de Coulomb, champ électrique, potentiel électrique, théorème de Gauss, champ magnétique, force de Lorentz, théorème d'Ampère, loi de l'induction*

Mathématique: *Équation différentielles,* ***Calcul d'intégrales simples et doubles****, développements limités,* ***représentation complexe****, relations trigonométriques*

bibliographie





Objectif du cours

Décrire et comprendre la propagation des ondes et plus particulièrement la propagation des ondes électromagnétiques. On s'intéressera à la propagation dans différents milieux : vide, plasma, diélectrique, métal. Les questions posées:

Est-ce que une onde électromagnétique peut se propager dans plasma, diélectrique, métaux?

Si oui, se propage t-elle sans perte?

Démarche:

I – Déterminer les équations dynamiques et locales qui régissent les grandeurs physiques associées à l'onde étudiée (onde électromagnétique: champ électrique et magnétique, onde sonore: pression)

II – Détermination de l'équation d'onde de l'onde étudiée

III – Etude de la propagation de l'onde dans différents matériaux ou à la l'interface entre deux matériaux

Ondes

Les ondes interviennent autant en physique fondamentale qu'en physique appliquée:

- En mécanique quantique, le comportement d'un électron est décrit par onde, elle décrit la densité de probabilité de trouver l'électron en un point de l'espace à un instant *t*.

- Pour transporter de l'information on a besoin d'un support. Il s'agit généralement d'une onde.

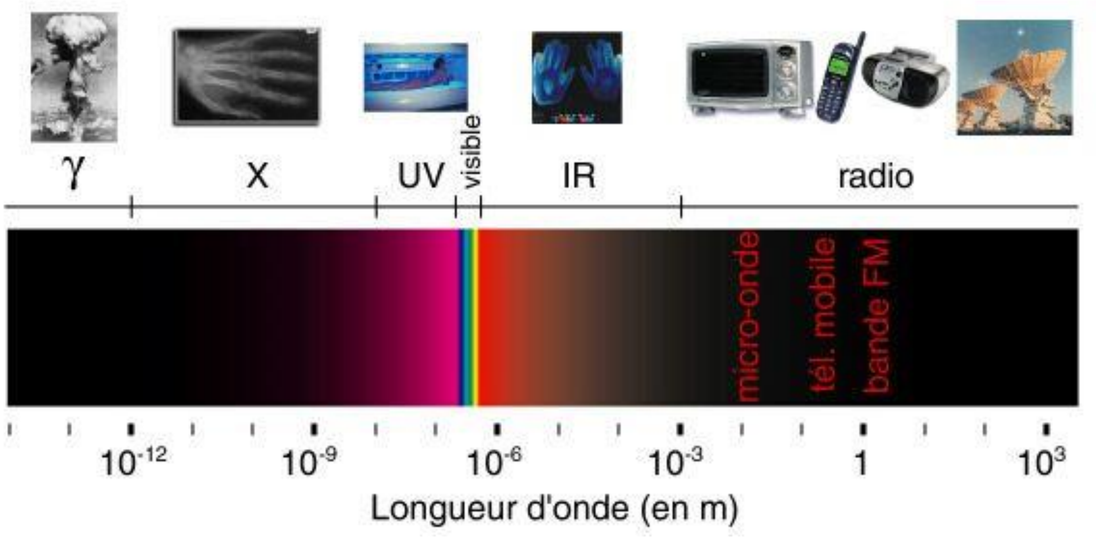
  - ✓ Son : distance et débit limité
  - ✓ Onde électromagnétique : distance et débit élevé

Pourquoi les communication optique?

"Télécoms" Optique.

Développement sous l'impulsion des besoins en télécommunication.

Télécommunications à distance et "instantanées ": Ondes Electromagnétiques:



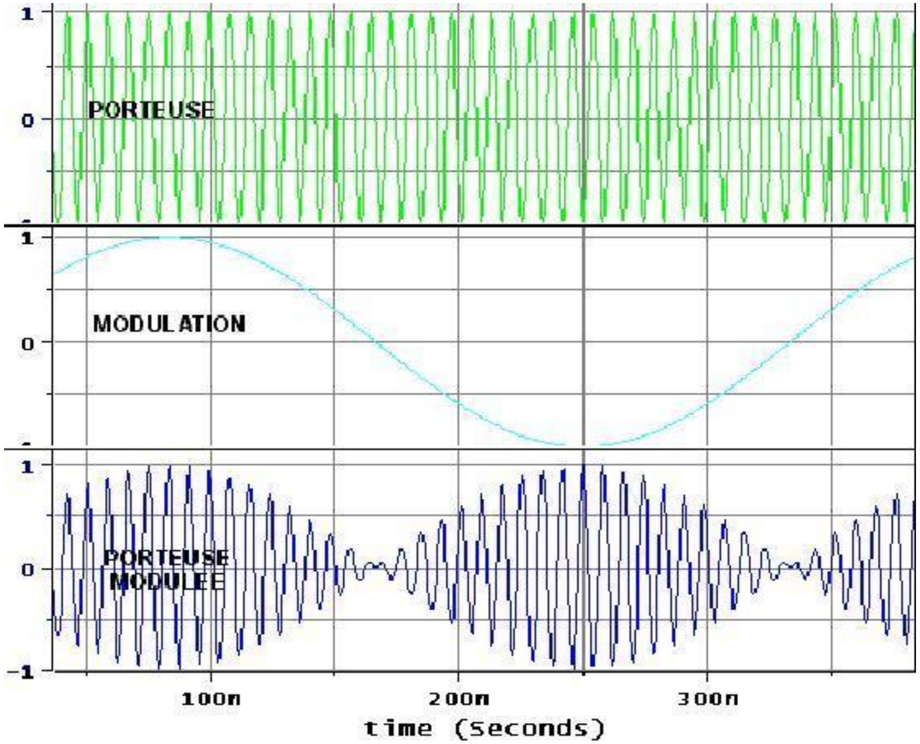
S.I.

$10^{-15} \Rightarrow$ femto
$10^{-12} \Rightarrow$ pico
$10^{-9} \Rightarrow$ nano
$10^{-6} \Rightarrow$ micro
$10^{-3} \Rightarrow$ milli
$10^{+3} \Rightarrow$ kilo
$10^{+6} \Rightarrow$ mega
$10^{+9} \Rightarrow$ giga
$10^{+12} \Rightarrow$ tera
$10^{+15} \Rightarrow$ peta

- 1792 $\Rightarrow$ Télégraphe optique (1h pour 400km).
- 1837-1960 $\Rightarrow$ Télégraphe de Samuel Morse (10bits.s^{-1})
- 1876 $\Rightarrow$ Téléphone de Graham Bell (64kbits.s^{-1})
- 1895 $\Rightarrow$ Télégraphie sans fil (TSF) de Marconi (< 10Mbits. s^{-1} en 1935).
- 1940 $\Rightarrow$ Câbles coaxiales (4Mbits .s^{-1})
- 1962 $\Rightarrow$ 250Mbits. s^{-1} (satellites)

Modulation et porteuse.

Les capacités de transport de l'information augmente avec la fréquence de la porteuse de l'onde électromagnétique, car c'est cette porteuse que l'on module pour porter l'information:

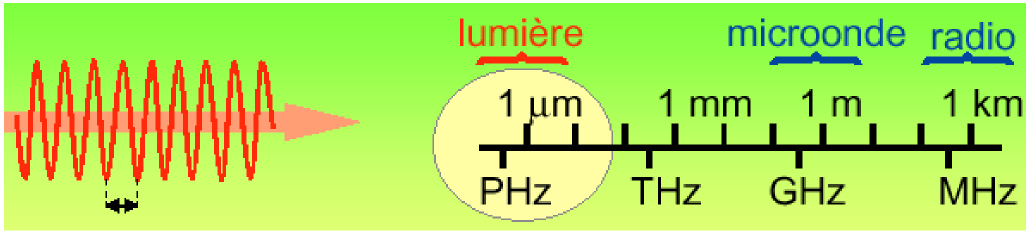


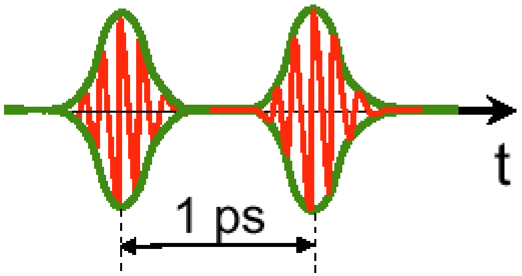
Modulation:

- T_B : période de la modulation.
- $T_{porteuse}$: période de la porteuse.
- $T_B >> T_{porteuse}$ (facteur 5 à 10).

Porteuse:

- Coaxe: 1Ghz.
- Radiocommunication: f≈ 10-20Ghz.
- Optique: f≈ 200Thz ⇒ fortes possibilités (facteur 10^5).





Plan du cours.

I. **Qu’est ce qu’une onde?**

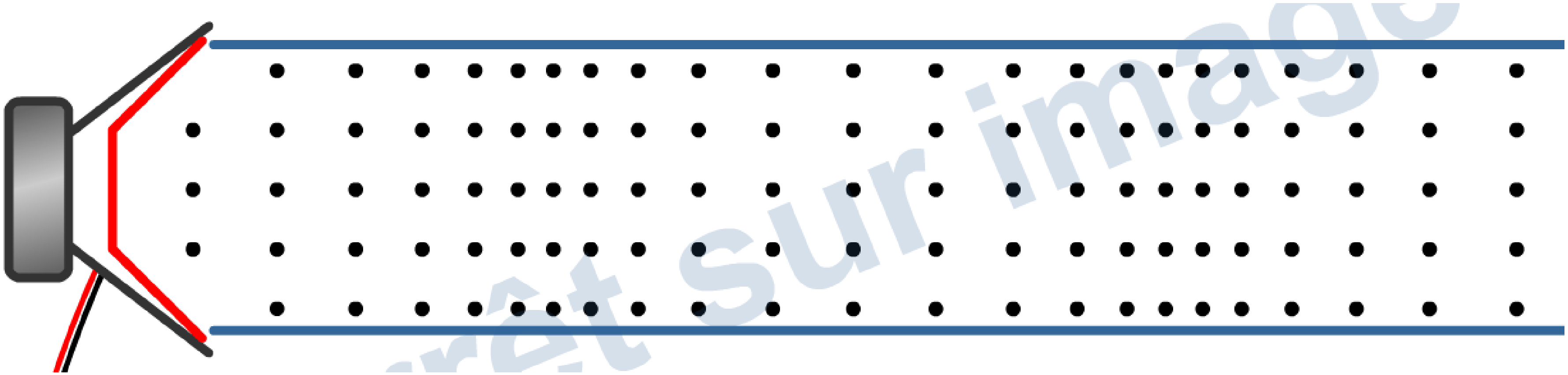
II. **Onde électromagnétique**

III. **Propagation d’une onde électromagnétique**

IV. **Réflexion d’une onde électromagnétique**

Plan du cours.

Onde progressive: définition



Une onde progressive est la propagation d’une perturbation d’un point A vers un point B en transportant de l’énergie et la quantité de mouvement, mais sans transporter de matière.

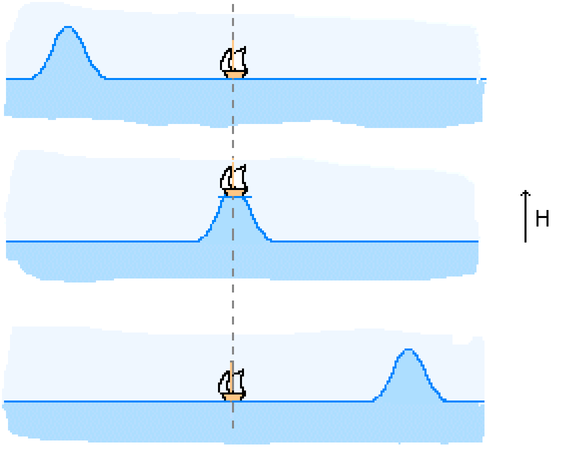
Une onde progressive lors de sa propagation produit lors de son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

- Hauteur d’eau pour la houle
- Pression pour le son
- **Champ électrique et champ magnétique pour la lumière**

onde 2.gif

Onde stationnaire

Onde Progressive



onde 2.gif

Une onde progressive est la propagation d'une perturbation d'un point A vers un point B en transportant de l'énergie et la quantité de mouvement, mais sans transporter de matière.

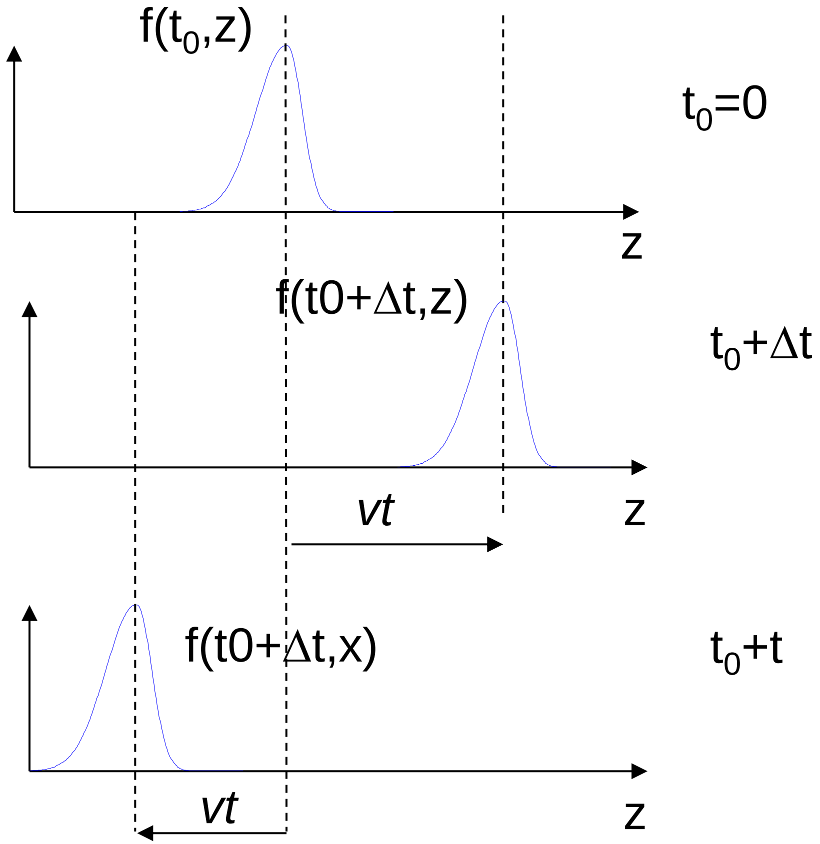
Une onde progressive lors de sa propagation produit lors de son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu.

- Hauteur d'eau pour la houle
- Pression pour le son
- **Champ électrique et champ magnétique pour la lumière**

Onde stationnaire

Expression d'une onde

Une onde progressive est une perturbation qui se déplace dans l'espace, elle dépend donc de t et z (cas 1D). Soit une perturbation f(z,t) qui se déplace à la vitesse v.



La perturbation s'est déplacé d'une distance v*t* pendant le temps *t*.

On a $f(t_0+t,z)=f(t_0,z-\Delta z)$ ce qui impose que la dépendance en z et en t est de la forme : **f(z-vt) pour une onde qui se propage dans le sens des x croissants.**

L'onde peut se propager dans l'autre sens dans ce cas la dépendance en z et en t est de la forme : **f(z+vt) pour une onde qui se propage dans le sens des x décroissants.**

Une onde progressive se propageant à la vitesse v est décrit par une fonction de la forme f(r±vt)

onde 2.lnk

Equation d'onde

Une onde progressive se déplace dans l'espace au cours du temps, elle est donc régit par une équation qui relie les variations dans temps aux variations dans l'espace.

Dans le cas 1D on a: $$\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\mathrm{v}\partial t}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\mathrm{v}\partial t}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=0$$

Dans le cas 3D on a: $$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=0$$

Cette équation ne fait appel que des opérateurs linéaires ce qui permet d'appliquer la **principe de superposition**:

La somme de solutions de l'équation d'onde est également solution de l'équation d'onde. Si f_1 et f_2 sont solution de l'équation d'onde alors $f=f1+f2$ est aussi solution de l'équation d'onde.

Equation d'onde (démonstration)

Pour une fonction de dépendance spatio-temporelle f(z-vt) on a :

$$\frac{\partial f(z-\mathrm{v}t)}{\partial z} = f'(z-\mathrm{v}t) \qquad \frac{\partial f(z+\mathrm{v}t)}{\partial z} = f'(z+\mathrm{v}t)$$

$$\frac{\partial f(z-\mathrm{v}t)}{\partial t} = -\mathrm{v}f'(z-\mathrm{v}t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(z+\mathrm{v}t)}{\partial t} = \mathrm{v}f'(z+\mathrm{v}t)$$

$$soit: \left(\frac{\partial f(z-\mathrm{v}t)}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial f(z-\mathrm{v}t)}{\partial t}\right) = 0 \qquad soit: \left(\frac{\partial f(z+\mathrm{v}t)}{\partial z} - \frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial f(z+\mathrm{v}t)}{\partial t}\right) = 0$$

Pour avoir une équation qui régit le comportement de f(z-vt) et de f(z+vt) en même temps on doit calculer la dérivé seconde, on a :

$$\frac{\partial^2 f(z-\mathrm{v}t)}{\partial z^2} = f''(z-\mathrm{v}t) \qquad \frac{\partial^2 f(z+\mathrm{v}t)}{\partial z^2} = f''(z-\mathrm{v}t)$$

$$\frac{\partial^2 f(z-\mathrm{v}t)}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 f'(z-\mathrm{v}t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f(z+\mathrm{v}t)}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 f'(z-\mathrm{v}t)$$

Soit pour les deux cas : $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = 0$

En 3D cela donne: $\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = 0}$

Démarche pour déterminer l'équation d'onde

Démarche:

I – L 'équation d'onde est une équation locale, c'est-à-dire que l'on doit travail à l'échelle locale (petit élément de l'espace)

II- Déterminer la grandeur physique qui va varier au passage de l'onde (onde électromagnétique: champ électrique et magnétique, onde sonore: pression)

III- Ecrire équations dynamiques (variation dans l'espace et dans le temps) à l'échelle locales.

IV – travailler ces équations de façon à trouver une équation d'onde du

type :

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=0}$$

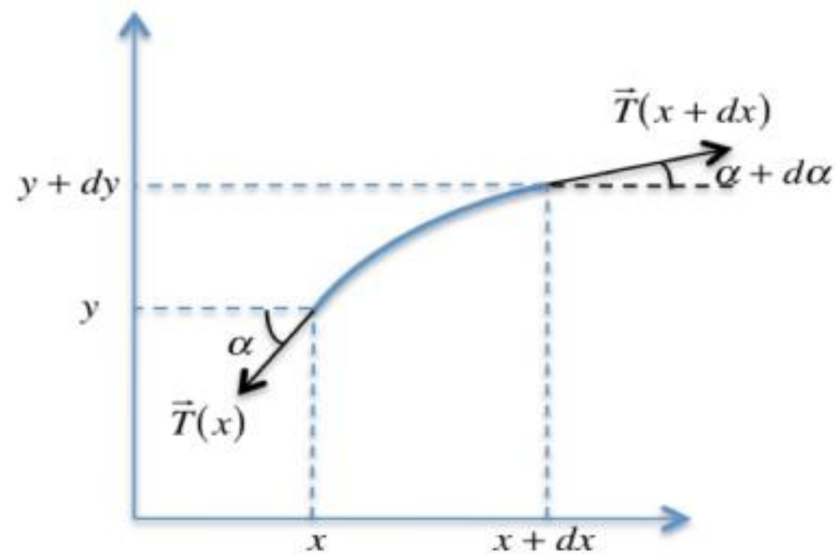
Exemple d'équation d'onde

Soit une corde tendu que l'on déforme et qu'on lâche. Il y a alors une onde qui se propage le long de la corde. On veut déterminer l'équation de propagation de cette onde.

Pour cela on va utiliser l'équation fondamentale de la dynamique. On a va raisonner sur un élément *dl* de la corde situé entre les point M et M' en x et x+dx. Cette élément *dl* subit un déplacement transversal y et y+dy.

On fait les hypothèses suivantes :

- La corde est tendue à une tension de module constant T_0
- La corde a une masse linéïque: μ
- Le poids de la corde est négligeable devant la tension T_0



Exemple d'équation d'onde

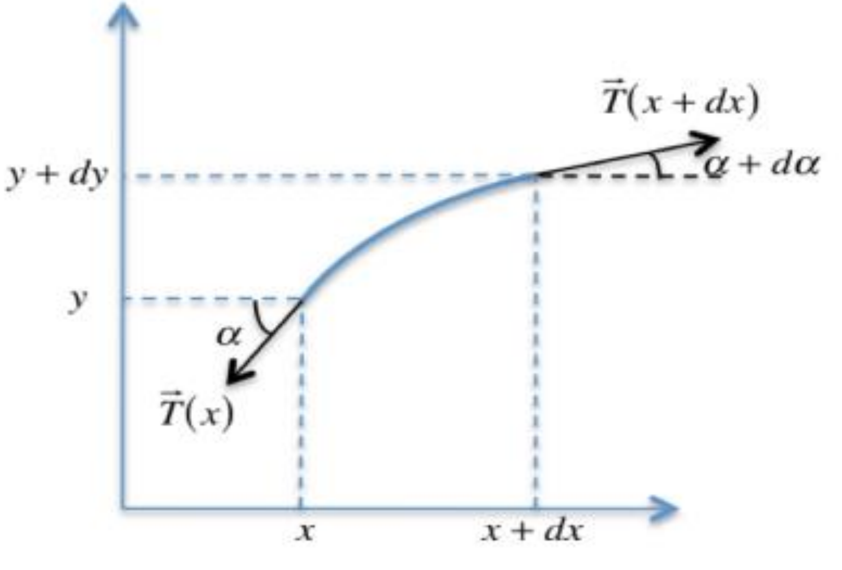
On fait les hypothèses suivantes :

- Les déplacements de la corde sont uniquement verticaux et de faibles amplitudes devant la longueur de la corde ($\alpha \ll 1$).

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ car } \alpha \ll 1$$

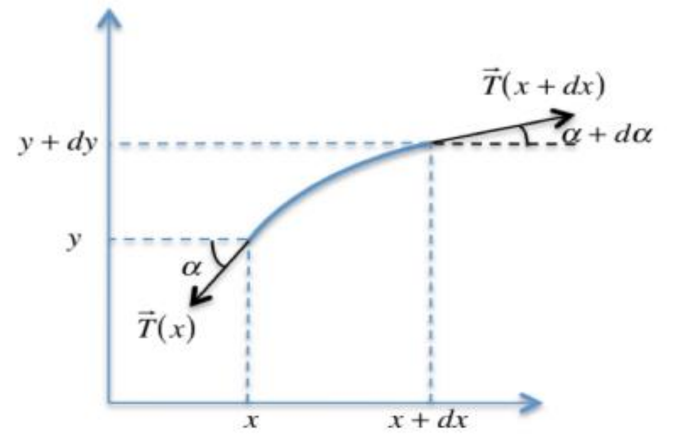
$$\sin(\alpha) \approx \alpha \text{ et } \quad \sin(\alpha + d\alpha) \approx \alpha + d\alpha$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 \quad et \quad \cos(\alpha + d\alpha) \approx 1$$



Exemple d'équation d'onde

De part et d'autre de l'élément *dl* de la corde on a une force qui s'exerce due à la tension T_0 de la corde. On applique le PFD à l'élément *dl:*



$$\boldsymbol{m_{dl}}\frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}} \quad = \vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x)$$

On projette selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ on a:

$$\boldsymbol{m_{dl}}\frac{\boldsymbol{\partial^2 y(t,x)}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = T_0 \sin\big(\alpha(x+dx)\big) - T_0 \sin\big(\alpha(x)\big)$$

$$\boldsymbol{m_{dl}}\frac{\boldsymbol{\partial^2 x(t)}}{\boldsymbol{\partial t}} = T_0 \cos\big(\alpha(x+dx)\big) - T_0\, cos\big(\alpha(x+)\big)$$

α<<1, on néglige les variations du second ordre: $\sin(\alpha) \approx \alpha$ et $\cos(\alpha) = 1$, et $\boldsymbol{m_{dl}}$=μdx

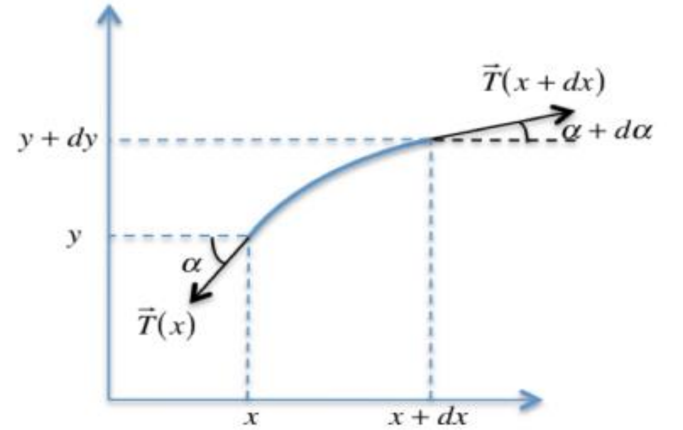
μdx $\frac{\boldsymbol{\partial^2 y(t,x)}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = T_0\alpha(x+dx) - T_0\alpha(x)$ on a un mouvement selon y

μdx $\frac{\boldsymbol{\partial^2 x(t)}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = 0$ pas de mouvement selon x

Exemple d'équation d'onde

on a : $\mu dx \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = T_0 \alpha(x + dx) - T_0 \alpha(x)$

Soit: $\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\alpha(x+dx)-\alpha(x)}{dx} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$



De plus on a $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \approx \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ car $\alpha \ll 1$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$$

On a finalement: $\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = 0$

On a bien une équation d'onde. Par identification on identifie la vitesse v de l'onde: $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ Tension en newton ou encore en $kg.m.s^{-2}$ et μ en $kg.m^{-1}$ donc v en $m.s^{-1}$.

Exemple: T=10N et μ= 0,001 en $kg.m^{-1}$, v=100 $m.s^{-1}$

Ondes harmoniques

On doit résoudre l'équation d'onde: $\Delta\psi - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$

Cette équation d'onde a un grand nombre de solutions, les solutions les plus simples sont des fonctions qui varient dans le temps et dans l'espace de façon sinusoïdale: on parle alors **d'ondes harmoniques**:

$$\psi(r,t) = \psi_0(r)\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_0)$$

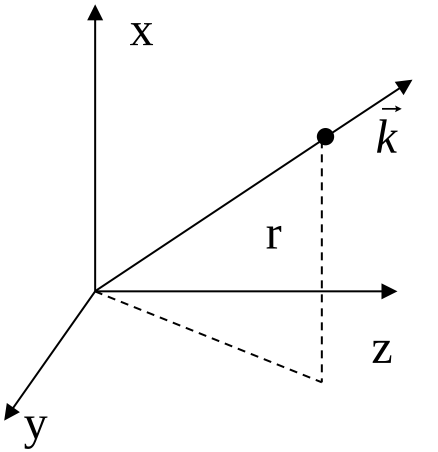
$$\psi_0(r) = \text{amplitude de l'onde}$$

$$(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_0) = \text{phase de l'onde}$$

$$\omega = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T} \text{ où } \nu = \text{fréquence de l'onde et } T = \text{période de l'onde}$$

$$\vec{k}\ est \text{ le vecteur d'onde } \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}n(\lambda) = \frac{\omega}{\mathrm{v}} \text{ où v = vitesse de l'onde}$$

$$\vec{k} \text{ représente la direction de propagation de l'onde}$$



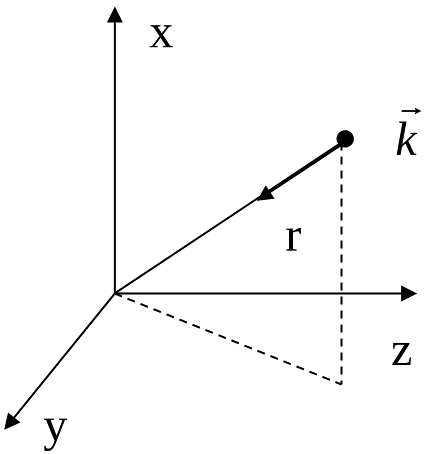
Cas d'une onde se propageant selon les z positifs on a:

$$\boxed{kz - \omega t = k\left(z - \frac{\omega}{k}t\right) = k(z - \mathrm{v}t)}$$

on a bien une fonction : f(z-vt)

Ondes harmoniques

$$\psi(r,t) = \psi_0(r)\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_0)$$



Cas d'une onde se propageant selon les z positifs on a:

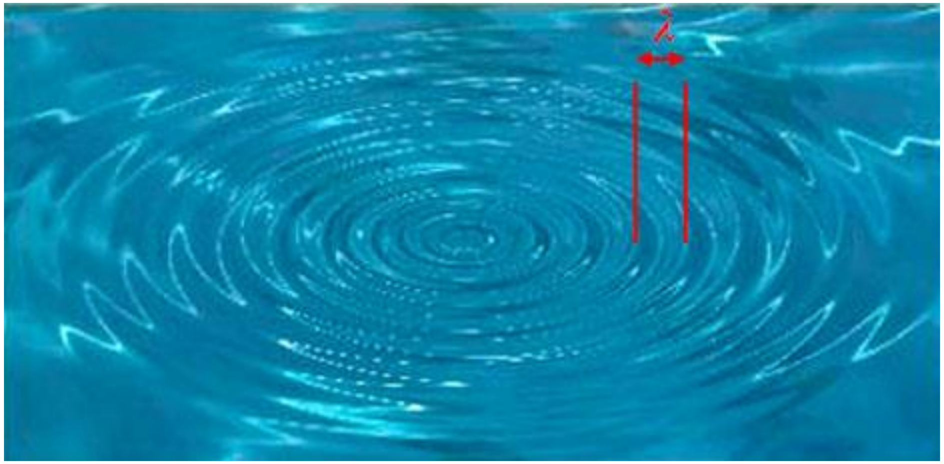
$$\psi(r,t) = \psi_0(r)\cos(-kz - \omega t + \phi_0) = \psi_0(r)\cos(kz + \omega t - \phi_0)$$

Propriétés des ondes harmoniques:

- Onde monochromatiques (On est obligé d'avoir des solutions monochromatiques car on a une équation d'onde qui dépend de λ via: $n(\lambda)$, $v(\lambda)$)
- Durée infinie, extension temporelle infinie
- Dans ce cas l'équation d'onde devient: $\Delta\psi + k^2\psi = 0$
- $\Psi_0(r)$ donne une information sur la répartition spatiale de énergie transportée par l'onde
- $\vec{k}\vec{r}+\phi_0$=cte donne la surface d'égale phase appelée front d'onde.
- L'énergie lumineuse se propage perpendiculairement au front d'onde.
- Les différentes ondes harmoniques se différencient par les expressions de $\Psi_0(r)$ et de $\vec{k}\vec{r}+\phi_0$

Direction de propagation de l'énergie

L'énergie lumineuse se propage perpendiculairement au front d'onde, exemple:



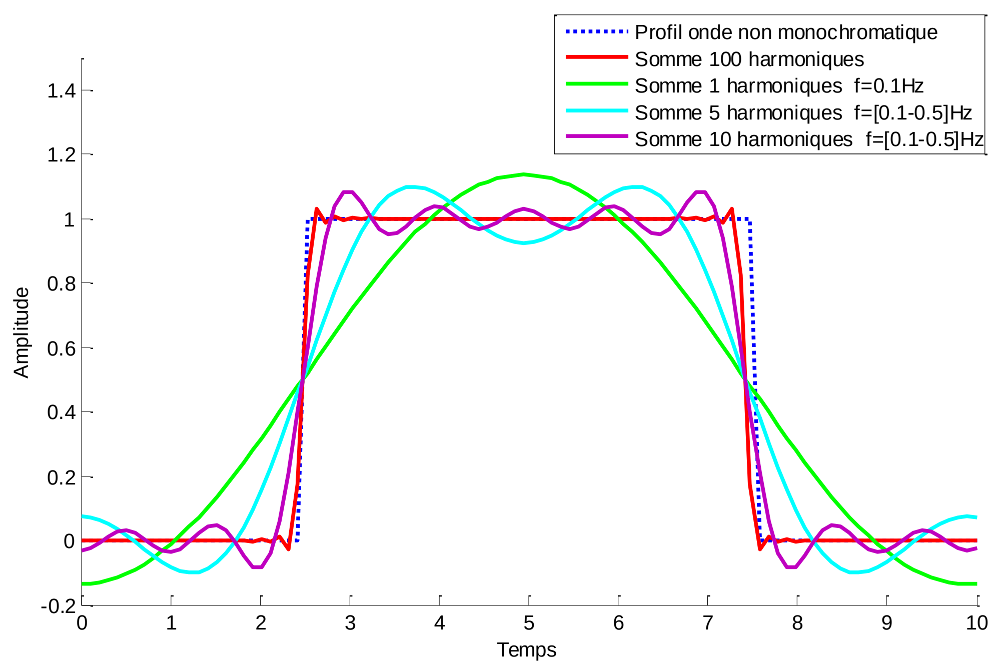
Lumière non monochromatique

Pour représenter une lumière non monochromatique se propageant suivant **les r croissants**, on utilise les propriétés linéaires de l'équation d'onde, c'est-à-dire le principe de superposition. Une onde non monochromatique (dépendance temporelle non sinusoïdale) est alors décrite par une somme d'ondes monochromatiques. Chaque onde monochromatique est associée une amplitude $\Psi_0(r,\omega)$ particulière permettant de décrire le spectre de l'onde non monochromatique *(cas ou $\phi(r)$=0 afin de simplifier l'écriture)*.

$$\boxed{\psi(t,r)=\sum_{\omega_i}\psi_0(r,\omega_i)\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega_i t) \quad Ou \quad \psi(t,r)=\int\psi_0(r,\omega)\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)d\omega}$$

Exemple pour une de dépendance temporelle rectangulaire.

Le spectre de l'onde non monochromatique correspond à l'ensembles des amplitudes $\Psi_0(r,\omega)$ permettant de reconstituer $\Psi_0(r,\omega)$ (TD).



Ondes harmoniques plane

La solution la plus simple est celle où $\Psi_0(r)$ est une constante et $\phi(r)=0$. On a alors dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde une amplitude et une phase constantes. On parle alors d'onde harmoniques planes. Pour une onde se propageant suivant **les r croissants:**

$$\psi = A\cos(\vec{k}\vec{r} - wt) \qquad \vec{k}\ \textit{est}\ \text{le vecteur d'onde}\ \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} n(\lambda)$$

$$\omega = 2\pi\nu \ \text{ où } \nu = \textit{fréquence optique}$$

$$\vec{\mathrm{r}} = \text{vecteur position d'un point de l'onde}$$

$$\nu = \frac{C}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad \text{où C = vitesse de la lumière dans le vide.}$$

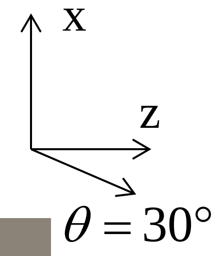
Caractéristiques:

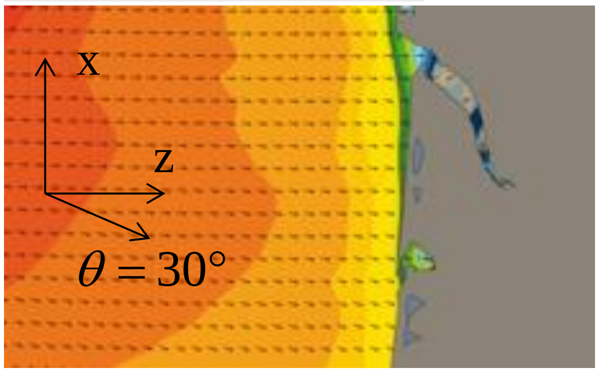
- Une seule direction de propagation
- Perturbation Ψ constante dans le plan d'équation: $k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$
- Ce plan est appelé le front d'onde et est perpendiculaire à la direction de propagation de l'énergie
- L'onde à extension infinie = énergie dans tout le plan transverse à la direction de propagation

Ondes harmoniques plane: exemple

Exemple: houle, prévision d'aujourd'hui:

date	houle	période	direct°
Jeu 07 10:00	2.90m	12 sec	
Jeu 07 16:00	2.70m	12 sec	





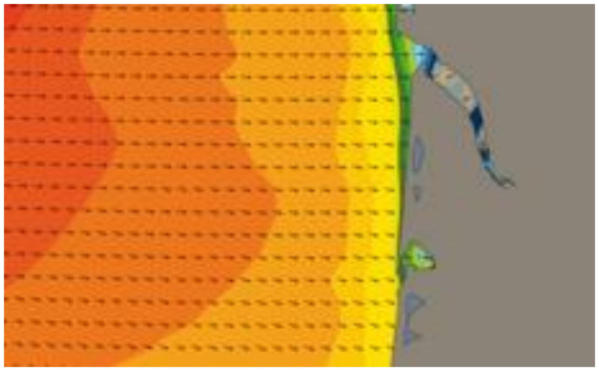
- Onde plane 2D
- Vitesse est de ~25km/h

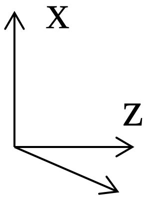
1. Donner l'expression à 10h de l'onde le plus précisément possible
2. Donner les valeur numérique de ω et k

Ondes harmoniques plane: exemple

Exemple: houle, prévision :

date	houle	période	direct°
Jeu 07 10:00	2.90m	12 sec	
Jeu 07 16:00	2.70m	12 sec	





$\theta = 30°$

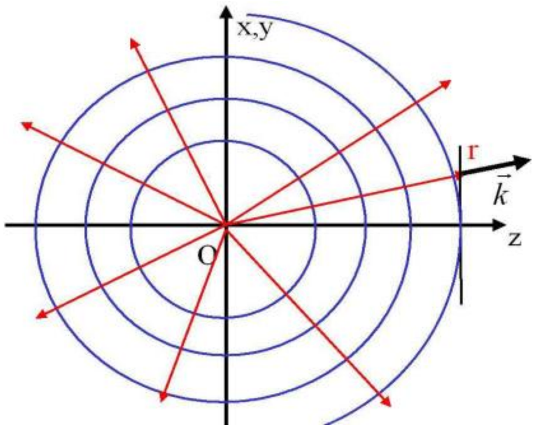
- Onde plane 2D
- Front d'onde est une ligne : crête de la houle, ensemble de point d'égale perturbation.
- expression de l'onde : $\psi = A\cos(\vec{k}.\vec{r} - wt)$

$$\psi = A\cos(k\cos(\theta)z - k\sin(\theta)x - wt) = A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}kz - \frac{k}{2}x - wt)$$

- $w = \frac{2\pi}{T}$ avec $\mathrm{T} = 12\mathrm{s}$
- Vitesse est de ~25km/h soit environ $7ms^{-1}$ donc λ=84m

Ondes sphériques

Dans le cas d'une source ponctuelle la symétrie de l'émission devient alors sphérique (même propriété dans toutes les directions de l'espace). Les surfaces d'amplitude et de phase constante sont des sphères dont le centre est le point source O. L'onde Ψ ne dépend que la coordonnée radiale. On parle alors d'onde sphériques.



L'onde se propage dans toutes

les directions de l'espace : $\vec{k}$ et $\vec{r}$ son colinéaires

Soit : $\psi(r,t) = \psi_0(r)\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) = \psi_0(r)\cos(kr - \omega t)$

Dans ces conditions l'équation d'onde sphérique

se réduit à sa partie radiale: $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\psi\right) + k^2\psi = 0$

Ψ(r,t) est solution de cette équation si Ψ0(r) varie en 1/r. L'expression d'une onde sphérique se propageant selon **les r croissants est**:

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t)}$$

Onde sphérique divergente

Ondes sphériques

$\Psi(r,t)$ est solution de cette équation si $\Psi 0(r)$ varie en 1/r. L'expression d'une onde sphérique se propageant selon **les r décroissants est**:

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr + \omega t)}$$

Onde sphérique convergente

- Caractéristiques:
  - Extension finie
  - Propagation dans toutes les directions de l'espace
  - Front d'onde de forme sphérique perpendiculaire aux directions de propagation.
  - Energie s'éparpillent dans l'espace
  - L'amplitude de l'onde diminue quand r augmente
  - La conservation de l'énergie est assurée par l'amplitude en 1/r

Notation Complexe

Il peut être commode pour représenter les ondes planes et ondes sphérique d'utiliser la notation complexe. On a alors :

- Pour une onde plane se propageant selon les r croissants :

$$\boxed{\psi(r,t) = A\cos(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i\left(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t\right)}\right]}$$

- Pour une onde sphériques divergente : $\boxed{\psi(r,t) = \dfrac{A}{r}\cos(kr - \omega t) = \mathrm{Re}\left[\dfrac{A}{r}e^{i(kr - \omega t)}\right]}$

Souvent on n'écrira pas « Re[--] », sous entendant qu'en réalité ce qui nous intéresse c'est la partie réelle des expressions en notation complexe. On écrit alors:

$$\boxed{\psi(r,t) = A\cos(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i\left(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t\right)}\right]}$$

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t) = \frac{A}{r}e^{i(kr - \omega t)}}$$

Vitesse de l’énergie et vitesse de l’onde

- Milieu dispersif: un milieu dans lequel la vitesse d’une onde monochromatique dépend la fréquence ou de la pulsation. On a $v_\varphi(w)$.

- Dans un milieu dispersif la vitesse de l’énergie transportée par une onde polychromatique est différente de la vitesse de l’onde.

- La vitesse de l’onde est appelé vitesse de phase

- La vitesse de l’énergie est appelé vitesse de groupe.

- Superposition de 2 ondes de fréquences différentes:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad \text{avec} \quad \Psi_1 = A_0 \cos\left(k_1 z - w_1 t\right) \quad \text{et} \quad \Psi_2 = A_0 \cos\left(k_2 z - w_2 t\right)$$

$$\text{On sait que : } \cos(\mathrm{a}) + \cos(\mathrm{b}) = 2\cos\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right)\cos\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{2}\right)$$

$$donc : \Psi = 2A_0\cos\left(\frac{\left(k_2+k_1\right)z-\left(w_2+w_1\right)t}{2}\right)\cos\left(\frac{\left(k_2-k_1\right)z-\left(w_2-w_1\right)t}{2}\right)$$

2 fréquences différentes: interprétation

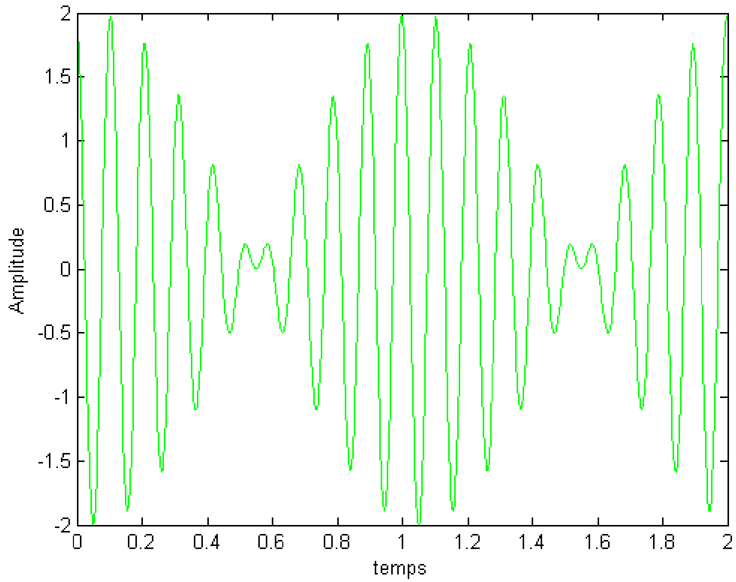
On a : $$\Psi = 2A_0 \cos\left(\frac{(k_2+k_1)z-(w_2+w_1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(k_2-k_1)z-(w_2-w_1)t}{2}\right)$$

- modulation rapide à la fréquence w_1+w_2 : porteuse
- modulation lente à la fréquence w_1+w_2 : enveloppe

Exemple pour :

✓ *f_1=10Hz et f_2=9Hz;*

Oscillation à f~9,5Hz,
Modulée par une enveloppe à 1Hz



animation

L'enveloppe été la porteuse ne se propage pas à la même vitesse.

$$V_{porteuse} = \frac{(w_2+w_1)}{(k_2+k_1)} = \mathrm{v}_\varphi = \text{vitesse de phase}$$

$$V_{enveloppe} = \frac{(w_2-w_1)}{(k_2-k_1)} = \mathrm{v}_g = \text{vitesse de groupe}$$

Vitesse de phase et vitesse de groupe

Si $w_1 \approx w_2 \approx w$ alors $k_1 \approx k_2 \approx k$. On a alors :

$$\mathrm{v}_{\varphi} = \frac{(w_2 + w_1)}{(k_2 + k_1)} \approx \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{k}}$$

$$\mathrm{v}_{g} = \frac{(w_2 - w_1)}{(k_2 - k_1)} \approx \frac{dw}{dk}$$

Est-ce les vitesse de phase et de groupe sont toujours différentes?

On calcule : $\frac{1}{\mathrm{v}_g} = \frac{dk}{dw}$ en utilisant $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}_{\varphi}(w)}$ dans un milieu dispersif

$$\frac{dk}{dw} = \frac{1}{\mathrm{v}_{\varphi}(w)} + \frac{1}{\mathrm{v}_{\varphi}(w)^2}\frac{\mathrm{dv}_{\varphi}(w)}{\mathrm{dw}}$$

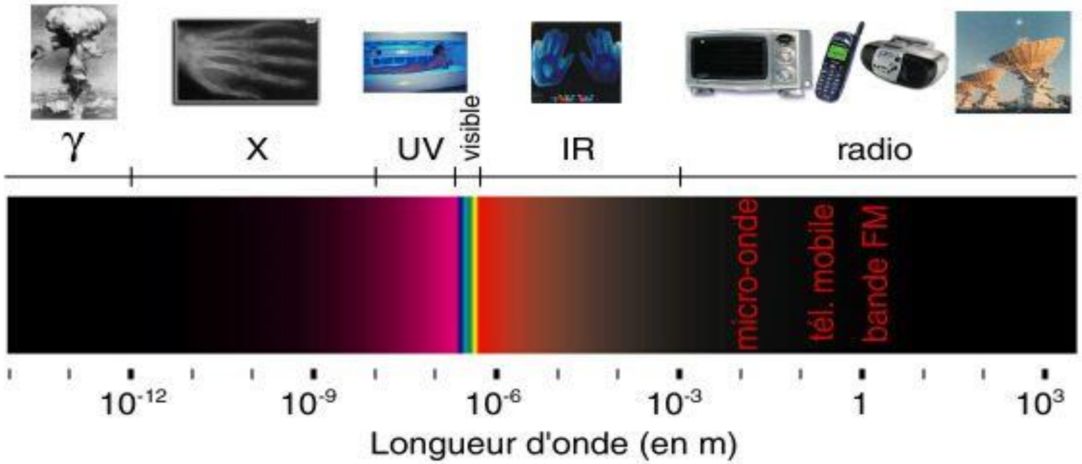
On a donc : $\frac{1}{\mathrm{v}_g} = \frac{1}{\mathrm{v}_{\varphi}(w)} + \frac{1}{\mathrm{v}_{\varphi}(w)^2}\frac{\mathrm{dv}_{\varphi}(w)}{\mathrm{dw}}$

vitesse de phase et de groupe identique dans un milieu non dispersif

$\frac{\mathrm{dv}_{\varphi}(w)}{\mathrm{dw}} \neq 0$ uniquement dans un milieu dispersif

Equations de Maxwell

Les ondes Electromagnétiques (E.M.) font partie d'une grande famille d'onde:



La lumière est donc un champ électrique et un champ magnétique qui s'influencent mutuellement au cours de la propagation. Le comportement de ces champs est régi localement par les équations de Maxwell:

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad Div\left(\vec{D}\right) = \rho_L$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{B}\right) = \vec{j_L} + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad Div\left(\vec{B}\right) = 0$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}.\vec{E} = \rho_L$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j_L} + \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Lois locales

Pour démontrer les équations de Maxwell, on utilise les lois de l'électrostatique et les lois de la magnétostatique. On les exprime localement, **c'est dire pour un élément de volume dv ou un élément de surface dS.**

Puis on s'intéresse à leur nouvelle expression dans le cas non statique. Par exemple on s'assurera de la conservation de la charge.

Il faut exprimer la loi macroscopique sous une forme intégrale portant sur un volume ou sur une surface. On utilisera pour cela le **Théorème d'Ostrogradski:**

Soit une surface fermée Σ qui délimite un volume V, et un champ de vecteur , on a alors :

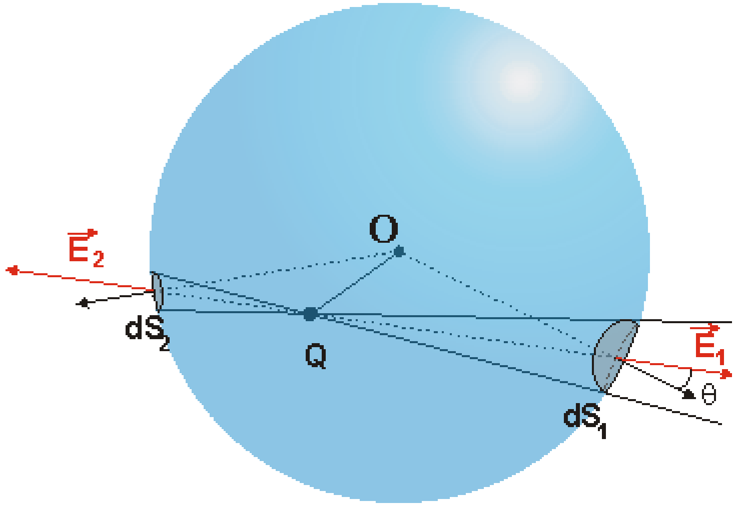
$$\int_{\Sigma_{fermée}} \overrightarrow{\mathrm{A}}\overrightarrow{dS} = \int div\left(\overrightarrow{\mathrm{A}}\right)dV$$

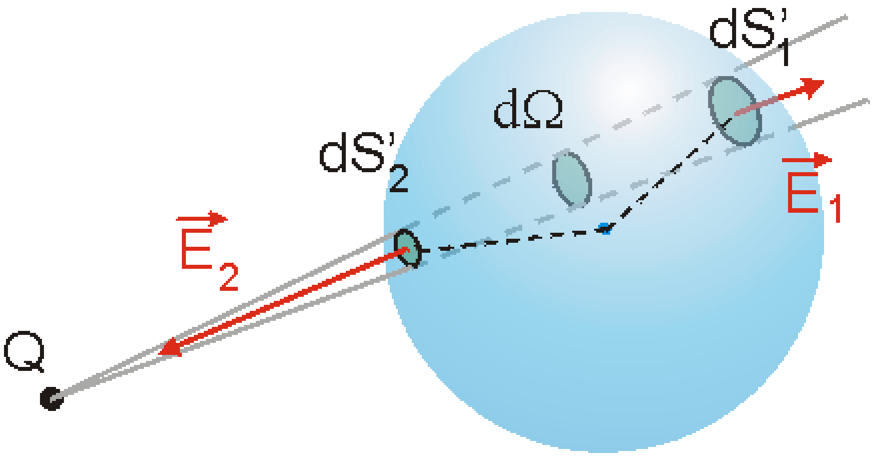
Et le Théorème de Stokes :
Soit un circuit fermé qui délimite une surface Σ, et un champ de vecteur , on a alors :

$$\oint \overrightarrow{\mathrm{A}}\overrightarrow{dl} = \int_{\Sigma} rot\left(\overrightarrow{\mathrm{A}}\right)\overrightarrow{dS}$$

Théorème de Gauss locales

Théorème de Gauss dans le vide : $\int_{\Sigma fermée} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$





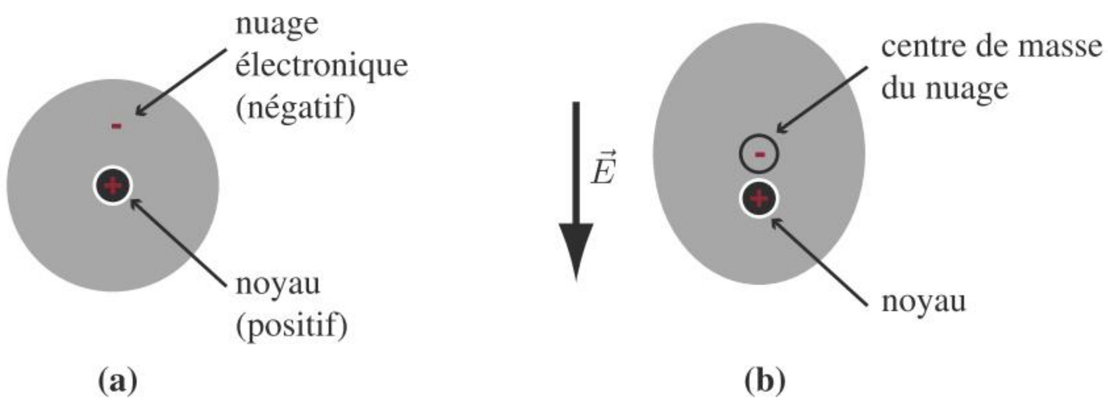
Pour avoir une forme locale de cette équation on doit considérer une densité volumique de charge ρ. On a alors : $Q = \int_{V_\Sigma} \rho dV$

On a alors: $\int_{\Sigma fermée} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int_{V_\Sigma} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \int_{V_\Sigma} div(\vec{E}).dV$

On a donc pour un élément de volume dV: $\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Polarisation milieu

Soit un atome, il est constitué de charge + et – et il est globalement neutre. Les centres de masse des charges + et – sont confondus (a). On applique un champ électrique $\vec{E}$ (b):

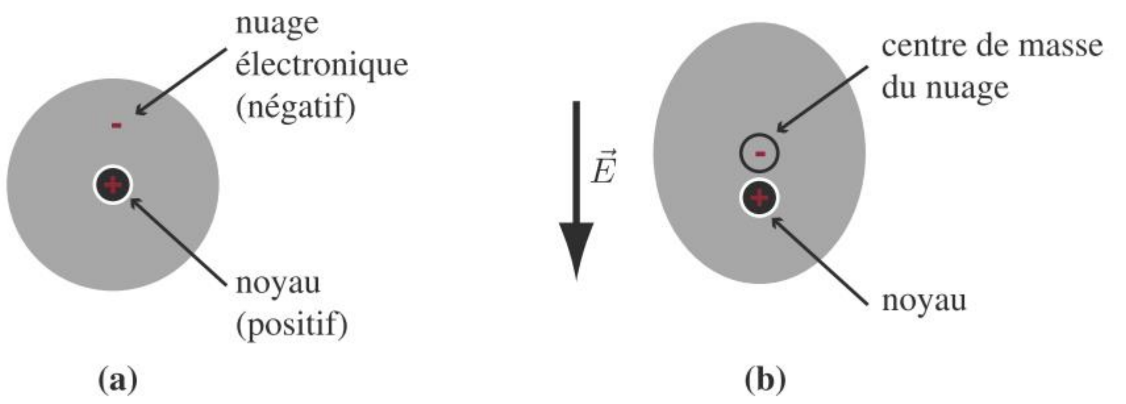


- Apparition d'un dipôle et de charges liées (globalement neutre dans un élément de volume dV)
- Macroscopiquement on a un grand nombre de dipôles qui créent un champ de polarisation $\overrightarrow{E_i} = \chi\vec{E}$
- Le champ totale est égale à: $\overrightarrow{E_T} = \overrightarrow{E_i} + \vec{E} = (1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_r\vec{E}$
- Théorème de Gauss local dans un milieu avec une densité de charge libre ρ_L:

$$\boldsymbol{div}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{E_T}}\right) = \frac{\rho_L}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boldsymbol{div}\left(\boldsymbol{\varepsilon_0}\varepsilon_r\vec{E}\right) = \rho_L \Rightarrow \boldsymbol{div}\left(\vec{D}\right) = \rho_L \textbf{avec } \vec{D} = \boldsymbol{\varepsilon_0}\varepsilon_r\vec{E}$$

$\vec{D}$ =**vecteur déplacement électrique**

Signification ε_r



- ε_r **décrit l'interaction champ électrique/matière.**
- ε_r **décrit la capacité du milieu à créer des dipôles électrique.**
  « Dipôles oscillants = antennes microscopique »
- **Cette interaction se traduit par un ralentissement de l'onde E.M. dans le milieu.**
- $\varepsilon_r = n^2$ avec n l'indice de réfraction du milieu
- $n = \frac{c}{v}$ avec c la vitesse de l'onde dans le vide et v la vitesse de l'onde dans le milieu
- Soit une distribution de charges + et – globalement neutre, si les charges ne sont pas liées alors pas de création de dipôle sous l'influence d'un champ $\vec{E}$ donc $\varepsilon_r = 1$

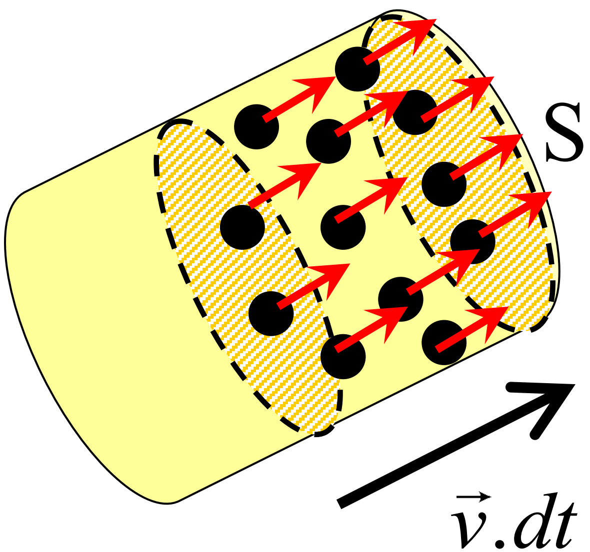
Densité de courant

Si une distribution de densité de charge r se déplace à la vitesse moyenne *v*, *on défini alors la densité de courant* $\vec{j}$:

$$\vec{j} = Nq\,\vec{v} = \rho\,\vec{v} \qquad ; [\mathrm{j}] = \mathrm{C.m^{-2}.s^{-1}} = \mathrm{A.m^{-2}}$$

- *n* densité volumique de porteur de charge
- q charge des porteur de charge
- $\vec{v}$ vitesse de moyenne des porteurs de charge

On a aussi: $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ avec ρ la densité volumique de charge en mouvement



La quantité de charge *dQ* qui va traverser la section *S* du conducteur pendant un intervalle de temps *dt* est égale aux charges contenues dans le volume d*V*=*v.dt* .S (cas ou la vitesse est normale à S, v = $|\vec{v}|$).

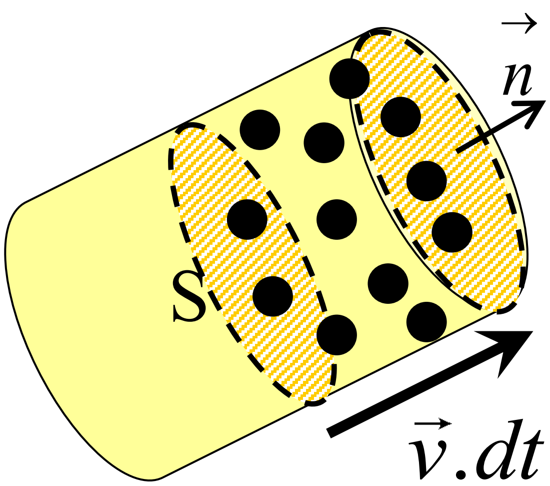
$\vec{j}$ **= Quantité de charge qui traverse une surface unité pendant une seconde**

Densité de courant

Le courant traversant une surface Σ est égale au lux de la densité de courant à travers cette surface:

$$\mathbf{I} = \int_{\Sigma} \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

Dans le cas d'une distribution de charge ρ uniforme et d'une vitesse $\vec{v}$ parallèle au fil conducteur, on a :



$$dQ = \rho.d\,\mathrm{V}_0$$

$$dQ = \rho.(S.v.dt) = (\rho.v).S.dt \qquad \text{avec } v = |\vec{\mathrm{v}}|$$

$$or: \ \mathbf{I} = \frac{dQ}{dt}$$

$$soit: \mathbf{I} = \frac{(\rho.v).S.dt}{dt}.S = \mathbf{j.S} \ \ \textbf{avec } \mathbf{j} = |\vec{j}|$$

L'intensité I du courant: C'est le flux de la densité de courant à travers la section S du conducteur et est souvent appelée "courant" tout court.

Conservation de la charge

Soit une surface Σ fermée délimitant un volume V_Σ contenant une densité volumique de charge libre ρ_L. La charge Q dans le volume est donc égale à: : $Q = \int_{V_\Sigma} \rho_L dV$

On a des charge qui quitte le volume V_Σ, on a alors un courant I= $\int_\Sigma \vec{J}.\overrightarrow{ds}$

On a une variation de volume dQ de la charge dans le volune V_Σ donc : $I = \frac{-dQ}{dt}$

La quantité de charge qui traverse Σ est égale à –dQ

On a donc: $\int_\Sigma \vec{J}.\overrightarrow{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\Sigma} \rho_L dV$

On applique **Ostrogradski:**: $\int_\Sigma div(\vec{J}).dV$ =- $\int_{V_\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} \rho_L dV$

On a donc pour un élément de volume dV: $div(\vec{J}) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_L = 0$

Loi locale de la conservation de la charge

Magnétostatique

Onde E.M. dans le vide

Dans le vide on a :

- $\varepsilon_r = 1$ $\Rightarrow$ pas de matière , pas de création de dipôle possible
- $\mu = \mu_0$ $\Rightarrow$ perméabilité du vide
- $\rho = 0$ $\Rightarrow$ pas de charges libres.
- $J = 0$ $\Rightarrow$ pas courants libres.

Ces conditions simplifient considérablement la formulation et surtout la résolution des équations de Maxwell.

$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad rot\left(\vec{H}\right) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\mathrm{Div}\left(\vec{D}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Div}\left(\vec{B}\right) = 0$$

$+$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\lambda) \vec{E} = \varepsilon_0 n^2(\lambda) \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

On a 4 équations à résoudre simultanément avec un couplage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Pour découpler $\vec{E}$ et $\vec{H}$. on substitue les équations les une dans les autres. Pour découpler $\vec{E}$ et $\vec{H}$ on calcule $\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{rot(E)}\right)$

Equation d'onde.

Afin de simplifier les écriture on utilise les notations : $rot\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, $\mathrm{Div}\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A}$

$\overrightarrow{grad}(C) = \vec{\nabla}(C)$ où C est un scalaire et la relation : $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$

$$rot(rot\left(\vec{E}\right)) = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -rot\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial\, rot(\vec{B})}{\partial t}\right)$$

Or $rot\left(\vec{H}\right) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow rot(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, Donc $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ Or $\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$ et $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

On en déduit : $\Delta\vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ soit : $\Delta\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (Eq.1)

De la même façon, on obtient : $\Delta\vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ (Eq.2)

Les champs $\vec{E}$ *et* $\vec{H}$ sont donc des ondes progressives vectorielles

$\nu = \frac{C}{\lambda}$ avec $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ où C = vitesse de la lumière dans le vide

Equation d'onde

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des grandeurs vectorielles que l'on peut décomposer dans un repère cartésien, on a alors:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \Delta E_x - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \Delta\vec{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \Delta B_x - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \\ \Delta B_y - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \Delta B_z - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{array}\right.$$

Toutes les composantes du champ E.M sont décrites par la même équation. Elles sont donc toutes identiques à une constante de proportionnalité près. De plus, on sait qu'une onde plane est solution de l'équation d'onde.

Onde E.M.= 6 Ondes planes d'amplitudes différentes mais de même vitesse et de même direction de propagation.

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad \text{(Eq. 3)} \qquad \vec{k}\ \textit{est}\ \text{le vecteur d'onde}\ \left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} n(\lambda)$$

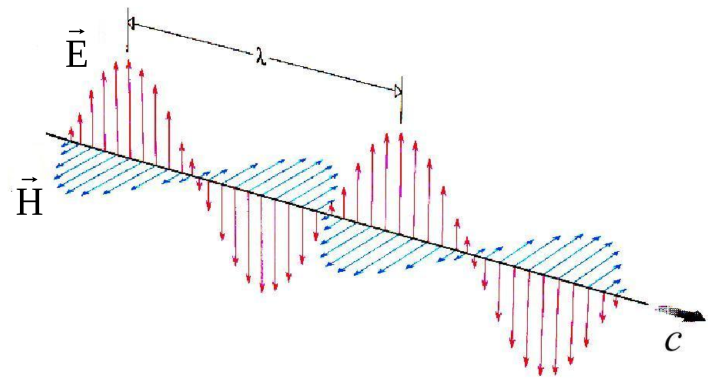
$$\vec{H} = \overrightarrow{H_0} e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad \text{(Eq. 4)} \qquad \omega = 2\pi\nu \ \text{ où } \nu = \textit{ fréquence.}$$

Conséquences .

Les équations d'onde prennent alors une nouvelle forme:

$$\Delta\vec{H} - k^2\vec{H} = 0 \qquad \text{(Eq. 5)}$$

$$\Delta\vec{E} - k^2\vec{E} = 0 \qquad \text{(Eq. 6)}$$



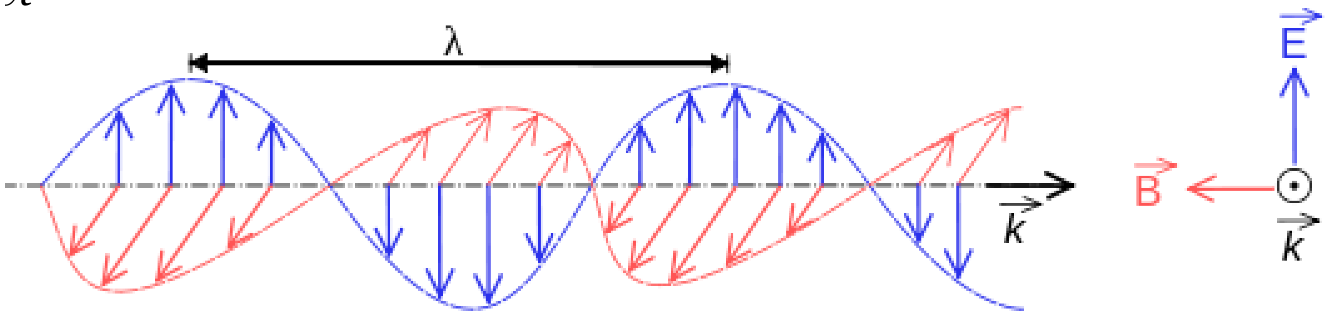
Le champ E.M. est transversal:

$$Div(\vec{E}) = 0 \;\Rightarrow i\vec{k}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{k} \perp \vec{E}$$

$$Div(\vec{B}) = 0 \;\Rightarrow i\vec{k}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{k} \perp \vec{B}$$

$$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;\Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\mu_0\vec{H} \qquad \vec{H} \perp \vec{k} \;\text{ et }\; \vec{H} \perp \vec{E}$$

$$rot(\vec{H}) = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \;\Rightarrow -\vec{k} \wedge \vec{H} = \omega\varepsilon\vec{E} \qquad \vec{E} \perp \vec{k} \;\text{ et }\; \vec{E} \perp \vec{H}$$



Relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Si on connait le champ $\vec{E}$ alors en en déduit $\overrightarrow{B}$ à partir de la relation:

$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On a calcule $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, puis on intègre par rapport au temps afin d'en déduire $\vec{B}$

A partir de l'impédance d'onde η:

$$\overrightarrow{B_0} \perp \vec{\mathrm{k}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_0} \perp \vec{\mathrm{E}} \qquad \vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathrm{E}} = \omega \overrightarrow{B_0}$$

$$|\mathrm{k}|.|\mathrm{E}| = \omega |B| \ \text{d'où :} \ \frac{|\mathrm{E}_0|}{|B_0|} = \frac{\omega_0}{|\mathrm{k}|} = vittesse = \eta$$

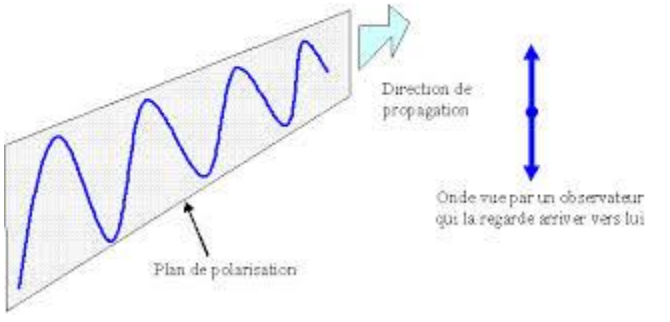
On peut remarque que $|B_0| << |\mathrm{E}_0|$

En conclusion on a : $\overrightarrow{B_0} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\vec{\mathrm{k}}}{|\mathrm{k}|}\right) \wedge \vec{\mathrm{E}}_0$

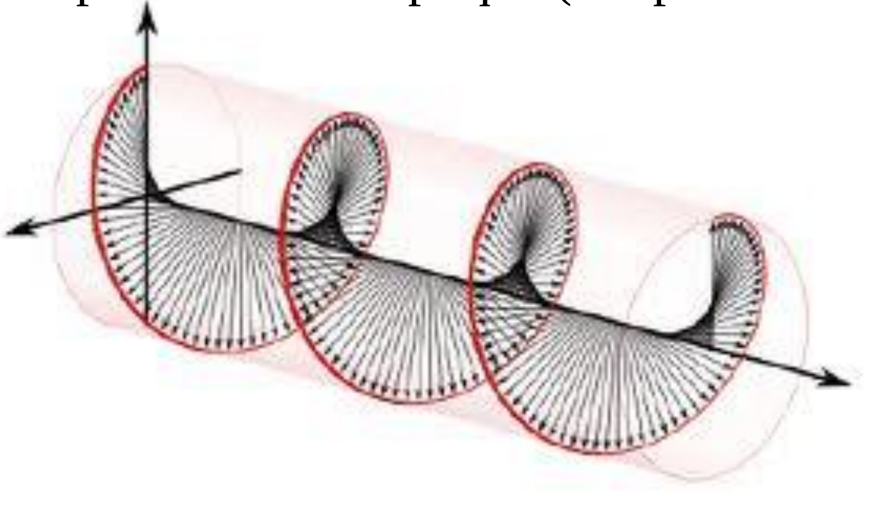
Polarisation

La polarisation est l'orientation du champ du champ électrique $\vec{E}$ au cours de la propagation ou du temps. On peut distinguer 3 cas:

- L'orientation est fixe,
  on parle de polarisation linéaire



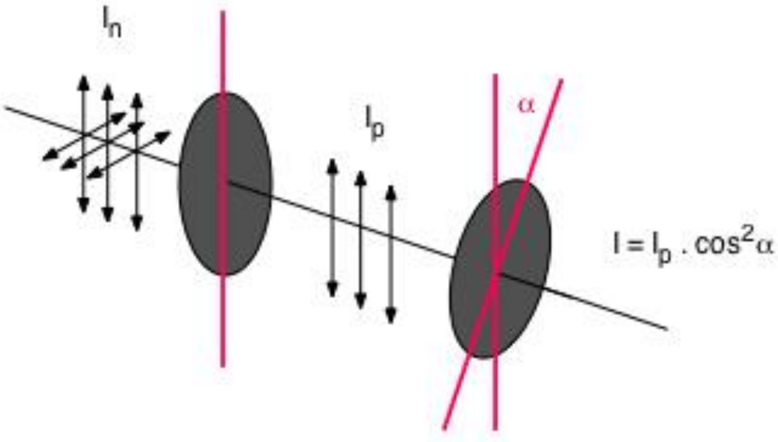
- L'orientation tourne au cours de la propagation,
  on parle de polarisation elliptique (cas particulier : circulaire)



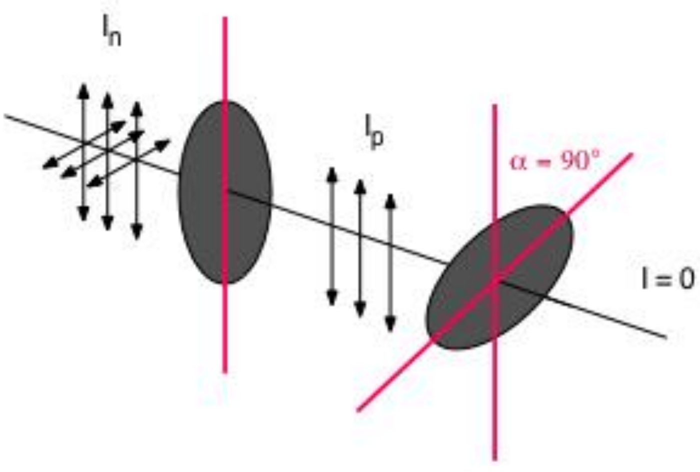
- L'orientation est aléatoire, on parle d'onde E.M. non polarisée

Application: lunette polarisante

Il existe des objets qui ne laisse passer qu'une seul orientation du champ électrique $\vec{E}$: les polariseurs.



- Le champ électrique transmis est la projection du champ incident sur l'axe de transmission du polariseur. $\left|\overrightarrow{E_{transmis}}\right| = \left|\overrightarrow{E_{incident}}\right| \cos(\alpha)$



- Polariseurs croisés par d'onde transmise

La lumière réfléchie à la surface de l'eau a une polarisation bien particulière que l'on peut filtrer avec un polariseur: **principe des lunettes de soleil polarisantes**.

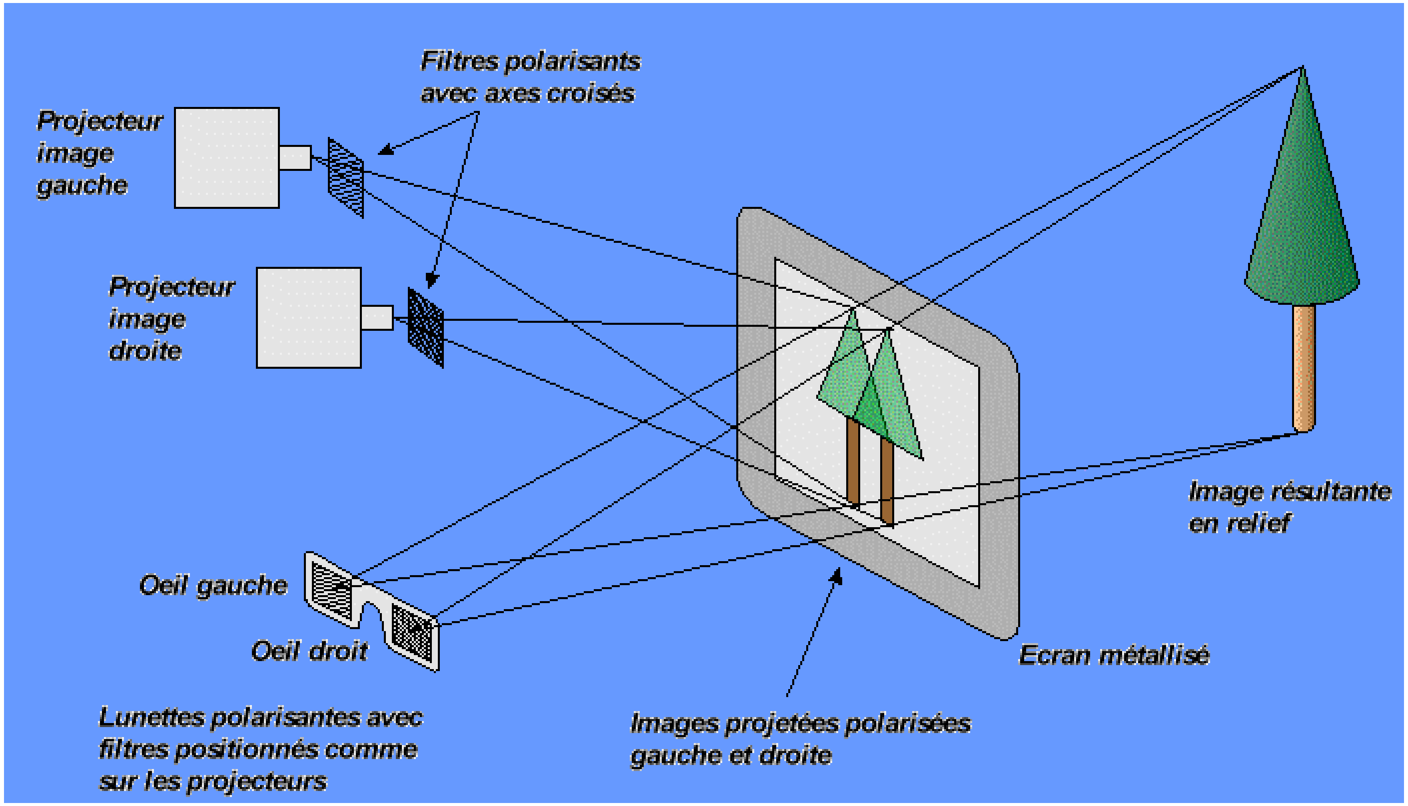
Application: lunette polarisante

Sans lunette polarisante: On observe bien comme la réflexion des arbres est plus forte et que le fond de la rivière n’est pas visible.

Avec lunette polarisante: On observe bien que la réflexion des arbres a disparut et que le fond de la rivière est bien visible.

Application: Cinéma 3D

Pour avoir une impression de 3D, chaque œil doit recevoir une image différente. La technique consiste donc à envoyer simultanément deux images au spectateur. Le rôle des lunette est donc de filtrée l'une des deux images pour chaque œil. On utilise pour cela la polarisation. On envoie deux images deux images avec des polarisation différentes que l'on filtre à l'aide de lunette polarisante.



Puissance électromagnétique .

Le champ E.M. transporte une puissance E.M.. Cette puissance est représentée par le vecteur de Poynting. Le vecteur de Poynting moyen est donnée par:

$$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathrm{E}} \wedge \vec{H}^{*}\right) = \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{B}^{*}\right)$$

$$\frac{\left\langle \vec{R} \right\rangle}{\left|\left\langle \vec{R} \right\rangle\right|} = \frac{\vec{\mathrm{k}}}{|\mathrm{k}|} = \vec{l}$$

$$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \left|\vec{\mathrm{E}}_0\right|^2 \vec{l}$$

- Le vecteur de Poynting moyen est donc dirigé selon l’axe de propagation.
- Le vecteur de Poynting moyen représente la densité moyenne (temporelle) de la puissance transportée par l’onde E.M. (W/m^2).
- Pour une onde plane, le vecteur Poynting moyen est proportionnel au carré du champ électrique (ou magnétique).
- Pour un champ E.M. quelconque, la puissance moyenne transportée est donnée par la somme des puissances moyennes transportées par chaque onde plane de la superposition qui permet de décrire ce champ E.M..